

Análisis de la eficiencia en transmisiones de engranajes rectos corregidos

A. Díez Ibarbia, A. Fernández del Rincón, M. Iglesias Santamaría, P. García Fernández, Ana M. de Juan de Luna, F. Viadero Rueda¹

¹Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad de Cantabria. fernando.viadero@unican.es

El trabajo presenta el análisis cuasi-estático de un sistema de transmisión de potencia entre engranajes rectos corregidos. En él se pretende ver la influencia de las correcciones y los efectos disipativos en la eficiencia y en los diferentes factores de funcionamiento (Reparto de carga principalmente). Dentro de los efectos disipativos se va a estudiar principalmente la fricción entre dientes en presencia de lubricante, por ser el efecto que más contribuye a las pérdidas en una transmisión entre engranajes en las condiciones de operación consideradas [7]. En este estudio, no se consideran las pérdidas aerodinámicas o las debidas al movimiento y compresión del fluido que pueden ser importantes para velocidades de operación mayores.

Los esfuerzos de fricción han sido implementados mediante un modelo de Coulomb con una formulación variable de coeficiente de rozamiento. En este estudio se van a utilizar diferentes formulaciones de coeficiente de rozamiento a partir de una formulación ampliamente utilizada en la bibliografía [2, 7, 8], denominada formulación de Niemann. Esta formulación de coeficiente de rozamiento depende de parámetros geométricos, de la rugosidad, de las propiedades del lubricante y de las condiciones de operación. Las expresiones utilizadas en el estudio son generadas a partir de ésta formulación variando diferentes parámetros como la velocidad de deslizamiento o las fuerzas de contacto, obteniendo así, distintos coeficientes de rozamiento. El objetivo del cálculo de estas expresiones es analizar, por un lado, el impacto en las pérdidas de potencia vinculadas a las fuerzas de fricción, y por otro lado, la influencia en el reparto de carga entre dientes.

1. Introducción

En el estudio de transmisiones mediante engranajes, comúnmente [10-12], las pérdidas de potencia se clasifican de acuerdo a su vinculación con la carga aplicada en; dependientes y no dependientes. Dentro de las pérdidas dependientes de la carga, se consideran las debidas a la fricción y a la rodadura y dentro de las no dependientes, las debidas al movimiento del fluido que rodea el sistema (fluido refrigerante o aire). Esta clasificación es válida cuando solo se tiene en cuenta el engranaje en sí mismo, es decir, cuando se desprecia el efecto de rodamientos, juntas, ejes o elementos auxiliares.

Por las condiciones de operación utilizadas en este estudio (menos de 6000 rpm), sólo se van a considerar las pérdidas dependientes de la carga, y dentro de éstas el efecto de la fricción por ser el más importante [1, 7]. Para comprobar el efecto que la fricción ejerce sobre el rendimiento del sistema, se ha realizado una comparativa de valores de eficiencia para diferentes coeficientes de rozamiento derivados de la formulación de Niemann.

Además del coeficiente de fricción, en este estudio, se quiere comprobar la importancia que las correcciones de perfil tienen en los valores de rendimiento. En este estudio solo se van a considerar las correcciones de tallado (se omiten destalonamiento y apuntamiento) con la premisa de que la corrección de tallado en la rueda 1 sea igual que el de la rueda 2 con signo opuesto, con el objetivo de no modificar la distancia entre centros.

El fin último de este estudio es determinar la influencia que tienen tanto la fricción, como las correcciones de perfil sobre la eficiencia energética en una transmisión de engranajes rectos. Para conseguir este objetivo, se ha partido del modelo de contacto y de la metodología de cálculo de la eficiencia desarrollados por los autores en trabajos previos [3-6].

2. Cálculo de la Eficiencia

En trabajos anteriores se ha presentado una metodología para el cálculo de la eficiencia [3]. Definiendo eficiencia como la relación entre la energía de salida y a la energía de entrada en un periodo de tiempo determinado. Siendo la potencia de salida (P_{out}), la de entrada (P_{in}) menos la de pérdidas (P_{loss}).

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{in} - P_{loss}}{P_{in}} \quad (1)$$

Estableciendo dos enfoques (numérico y analítico) diferentes, dependiendo del tipo de formulación escogida para determinar tanto el coeficiente de fricción (FC) como el reparto de carga (LS).

2.1. Enfoque Numérico

A través de este enfoque, no existe ninguna restricción en cuanto al uso de una formulación u otra de LS y FC para el cálculo de la eficiencia. Previo a este cálculo, es necesario determinar las fuerzas de contacto, de la velocidad de deslizamiento (SV), así como del coeficiente de fricción para cada par de dientes en contacto. Esta tarea se realizará a partir de un modelo de fuerzas de contacto previamente desarrollado por los autores y ampliamente presentado en la literatura [3-6]. Obteniendo a partir de ellos las pérdidas de potencia instantáneas utilizando la ecuación (2):

$$P_{loss,inst} = \sum_{z=1}^N F_R(\theta) * V_s(\theta) = \sum_{z=1}^N \mu(\theta) * F_N(\theta) * V_s(\theta) \quad (2)$$

Donde N es el número de pareja de parejas de dientes en contacto, F_R la fuerza de rozamiento, μ es el coeficiente de fricción, F_N es la fuerza de contacto (en la dirección de la línea de acción) y V_s es la velocidad de deslizamiento para cada contacto. Todas ellas dependientes del ángulo de rotación del engranaje θ .

En el modelo propuesto, por simplicidad, la potencia de pérdidas instantáneas se calcula a partir de la ecuación (3):

$$P_{loss,inst} = \sum_{z=1}^N (T_{in} * \omega_1 - T_{out} * \omega_2) \quad (3)$$

Siendo T_{in} y T_{out} los pares de entrada y salida y ω_1 y ω_2 las velocidades angulares del piñón y la rueda conducida respectivamente. Definiendo las pérdidas por ciclo de engrane (θ_p) como:

$$P_{loss} = \frac{\int_{-\frac{\theta_p}{2}}^{\frac{\theta_p}{2}} P_{loss,inst} d\theta}{\theta_p} \quad (4)$$

Obteniendo finalmente la eficiencia mecánica del sistema a partir de la ecuación (1). Además, para el posterior análisis del valor de eficiencia calculado, se ha definido un parámetro (ecuación (5)) que permite la perfecta comprensión del efecto que ocasiona tanto la velocidad de deslizamiento, el coeficiente de fricción y el reparto de carga en las pérdidas instantáneas del contacto.

$$H_{vinst} = \int_A^E \frac{\mu(\theta) * F_N(\theta) * V_s(\theta)}{F_{Nmax} * V} d\theta \quad (5)$$

Siendo F_{Nmax} la fuerza de contacto máxima y V la velocidad de deslizamiento.

2.2. Enfoque Analítico

Para calcular la eficiencia a través de este enfoque, contrariamente a lo expuesto en el anterior, hay que tener en cuenta ciertas limitaciones; el FC tiene que ser constante (CFC) y el reparto de carga debe ser uno predeterminado (generalmente un reparto de carga uniforme).

Este enfoque ha sido ampliamente utilizado y contrastado en la literatura [8, 9]. El fundamento es el mismo que el utilizado en el enfoque numérico (ecuaciones (2) y (4)).

Aplicando la restricción del CFC medio para todo el ciclo de engrane (μ_m) se obtiene:

$$P_{loss} = \mu_m * \frac{F_{tmax}}{\cos(\alpha_{wt})} * \frac{V}{p_{et}} * \int_A^E \frac{F_N(\theta) * V_s(\theta)}{F_{Nmax} * V} d\theta \quad (6)$$

Siendo α_{wt} el ángulo de presión, F_{tmax} la fuerza tangencial, p_{et} el paso transversal y definiendo el factor de pérdidas (H_v) como:

$$H_v = \frac{1}{\cos(\alpha_{wt})} * \frac{1}{p_{et}} * \int_A^E \frac{F_N(\theta) * V_s(\theta)}{F_{Nmax} * V} d\theta \quad (7)$$

La ecuación (6) queda expresada:

$$P_{loss} = \mu_m * F_{tmax} * V * H_v = P_{in} * \mu_m * H_v \quad (8)$$

Si el reparto de carga es uniforme (LS=0.5 cuando N=2), el factor de pérdidas H_v se define a través de la ecuación (8):

$$H_v = \frac{\pi * (u + 1)}{z_1 * u * \cos(\beta_b)} * (1 - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \quad (9)$$

Donde z_1 es el número de dientes del piñón, u la relación de transmisión, ε_α y $\varepsilon_{1,2}$ la relación de contacto total y de cada semi-segmento. Reordenando, la eficiencia mecánica en la ecuación (1):

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{in} - P_{loss}}{P_{in}} = \frac{P_{in} - P_{in} * \mu_m * H_v}{P_{in}} = 1 - \mu_m * H_v \quad (10)$$

3. Modelo de coeficiente de fricción

Como se ha comprobado en la metodología de ambos enfoques, la elección del FC es de vital importancia para determinar el enfoque a seguir. En este trabajo, el FC se basa en la formulación denominada de Niemann que es ampliamente utilizada en la literatura [2, 7-9]. Esta formulación presentada en la ecuación (11), propone un coeficiente de fricción constante a lo largo de todo el ciclo de engrane.

$$\mu_m = 0.048 * \left(\frac{F_{bt}}{b} \right)^{0.2} * \eta_{oil}^{-0.05} * R_a^{0.25} * X_L \quad (11)$$

Donde F_{bt} es la fuerza de contacto en el punto primitivo, ρ_c es el radio de curvatura equivalente en el punto primitivo, b es el ancho del diente, η_{oil} es la viscosidad dinámica del fluido, R_a es la rugosidad y los parámetros $V_{\Sigma C}$ y X_L se definen como:

$$V_{\Sigma C} = 2 * V_t * \sin(\alpha_{wt}) \text{ y } X_L = \frac{1}{\left(\frac{F_{bt}(\theta)}{b} \right)^d}; \quad d = 0.0651 \text{ para aceite mineral}$$

A partir de esta formulación se han generado otras nomenclaturas de coeficiente de fricción variables con la posición angular. Para ello se han alterado diferentes parámetros de la ecuación original (ecuación (11)), obteniendo las ecuaciones (12), (13), (14), (15) y (16).

$$\mu(\theta) = 0.048 * \left(\frac{F_{bt}(\theta)}{b} \right)^{0.2} * \eta_{oil}^{-0.05} * R_a^{0.25} * X_L \quad (12)$$

$$\mu(\theta) = 0.048 * \left(\frac{F_{bt}(\theta)}{b} \right)^{0.2} * \eta_{oil}^{-0.05} * R_a^{0.25} * X_L * \tanh\left(\frac{V_s(\theta)}{v_o}\right) \quad (13)$$

$$\mu(\theta) = 0.048 * \left(\frac{\frac{F_{bt}(\theta)}{b}}{|V_s(\theta)| * \rho_c(\theta)} \right)^{0.2} * \eta_{oil}^{-0.05} * R_a^{0.25} * X_L \quad (14)$$

$$\mu(\theta) = 0.048 * \left(\frac{\frac{F_{bt}(\theta)}{b}}{|V_s(\theta)| * \rho_c(\theta)} \right)^{0.2} * \eta_{oil}^{-0.05} * R_a^{0.25} * X_L * \tanh\left(\frac{V_s(\theta)}{v_o}\right) \quad (15)$$

$$\mu(\theta) = 0.048 * \left(\frac{\frac{F_{bt}}{b}}{V_{sc} * \rho_c} \right)^{0.2} * \eta_{oil}^{-0.05} * R_a^{0.25} * X_L * \tanh\left(\frac{V_s(\theta)}{v_o}\right) \quad (16)$$

Para este estudio se han considerado seis nomenclaturas de coeficiente de fricción denominadas (i) CFC (ecuación (11)), (ii) VFC1 (ecuación (12)), en la que se considera la variación de las fuerzas normales y del radio de curvatura, (iii) VFC2 (ecuación (13)), que además incluye una corrección adicional (mediante función sigmoidea, donde v_o es el umbral de la velocidad de deslizamiento) para evitar la singularidad del contacto en la zona del punto primitivo (la fuerza de rozamiento se anula instantáneamente), (iv) VFC3 (ecuación (14)), en la que se considera la variación de las fuerzas normales, del radio de curvatura y de las velocidad de deslizamiento, (v) VFC4 (ecuación (15)), además incluye la corrección en el punto primitivo comentada en VFC2 y (vi) VFC5 (ecuación (16)), que es la formulación constante (CFC) incluyendo la corrección en el punto primitivo. En la Figura 1 se muestra a modo de ejemplo, las diferentes nomenclaturas para unas mismas condiciones de operación.

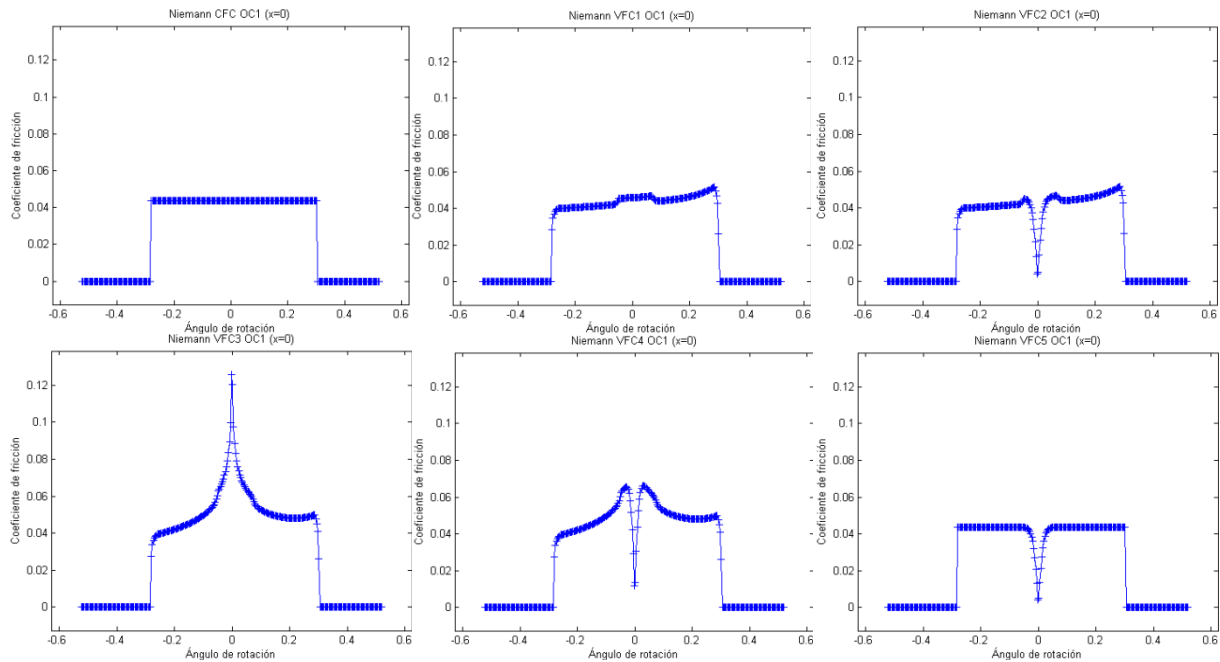


Figura 1 Coeficientes de rozamiento ($x=0$, 1500 rpm y 159 Nm): a) CFC, b) VFC1, c) VFC2, d) VFC3, e) VFC4, f) VFC5

4. Resultados

En este trabajo se ha realizado el análisis causi-estático de los valores de eficiencia obtenidos a partir de ambos enfoques para cada una de los coeficientes de fricción especificados. Especial importancia se dará al análisis del primer coeficiente de fricción analizado (CFC), explicando en detalle cada uno de los aspectos influyentes en el cálculo de la eficiencia, para posteriormente mostrar las diferencias y similitudes con el resto de coeficientes de fricción caso de estudio.

Para la realización de esta comparativa se utilizarán los parámetros geométricos y condiciones de operación presentados en la Tabla 1.

Tabla 1 Condiciones de operación/parámetros de los engranajes

Condiciones de operación	Potencia (kW)	Par (Nm)	Velocidad (rpm)
OC1	25	159	1500
OC2	25	40	6000
OC3	50	159	3000
OC4	100	637	1500
OC5	100	159	6000
Parámetros principales			
Número de dientes del piñón	18	Módulo	3
Número de dientes de la rueda conducida	36	Ancho de cara	26.7 mm
Ángulo de presión	20°	Rugosidad media	0.8 μm

En la Figura 2, se muestra por una parte (extremos de la figura), los parámetros que influyen en el cálculo de la eficiencia (LS, SV y FC) y el factor de pérdidas para cada uno de los enfoques, y por otra parte (centro de la figura), el valor de la eficiencia para distintos niveles de carga y velocidad cuando se varía el factor de corrección del perfil del diente.

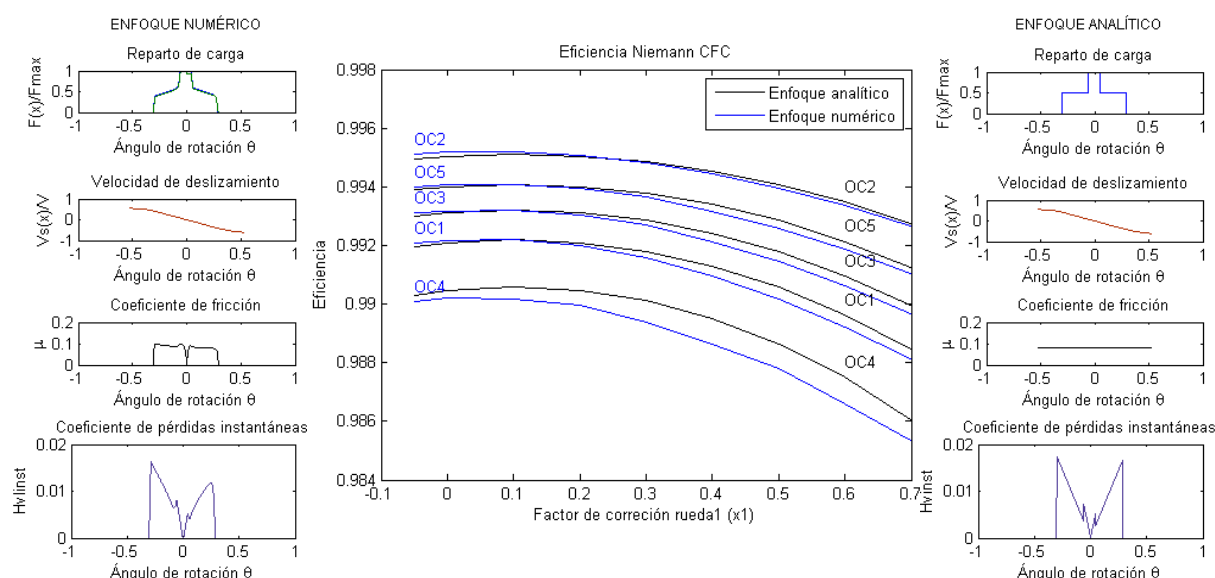


Figura 2 Comparación entre ambos enfoques. a) Reparto de carga, velocidad de deslizamiento, coeficiente de fricción y coeficiente de pérdidas instantáneas b) Valores de eficiencia para distintos factores de corrección y condiciones de operación

En la Figura 2a, se pueden distinguir las principales diferencias entre uno y otro enfoque en lo relativo al reparto de carga y como esto influye en el coeficiente de pérdidas instantáneas. Se puede observar que mientras que en la formulación analítica se usa un reparto de carga uniforme, la formulación utilizada en el enfoque numérico es la no uniforme, calculada a partir de un modelo de contacto que tiene en cuenta la deformación global del engranaje y local de los dientes en contacto. Este hecho tiene un efecto notorio en la distribución del factor de pérdidas, puesto que se aprecia una mayor zona de contacto en el enfoque numérico respecto del analítico.

Además, en el enfoque analítico se puede apreciar una mayor pérdida en las zonas más alejadas del punto primitivo que en el numérico. La razón de este efecto es que la carga transmitida por las dos parejas de dientes en contacto es siempre la misma ($LS=0.5$). Sin embargo, en el enfoque numérico se aprecia que a medida que una de las parejas de dientes va entrando o perdiendo el contacto, soporta menos carga, lo cual se traduce en menores pérdidas (la SV es máxima en esas regiones).

Estas diferencias entre los repartos de carga de ambos enfoques se traducen en una dispersión del valor de eficiencia entre enfoques mostrada en la Figura 2b. Sin embargo, se puede apreciar que la dispersión entre enfoques es aceptable, observando que esta diferencia se acentúa cuando el par resistente es mayor (OC4). Esto ocurre principalmente por la consideración de la flexibilidad del engranaje en el modelo de contacto. Es decir, si una pareja de dientes está en contacto, la deformación ocasionada en ésta, afectará al resto de dientes del

engranaje, consiguiendo de esta manera que el inicio del contacto con el siguiente diente se produzca antes, así como que la finalización del contacto sea posterior al teórico. Este hecho se va a traducir en un aumento de la relación de contacto efectiva (Figura 3), con lo que al ser mayor el contacto efectivo que el teórico, es previsible que las pérdidas sean mayores en el modelo numérico que en el teórico, como se puede observar en la Figura 2b.

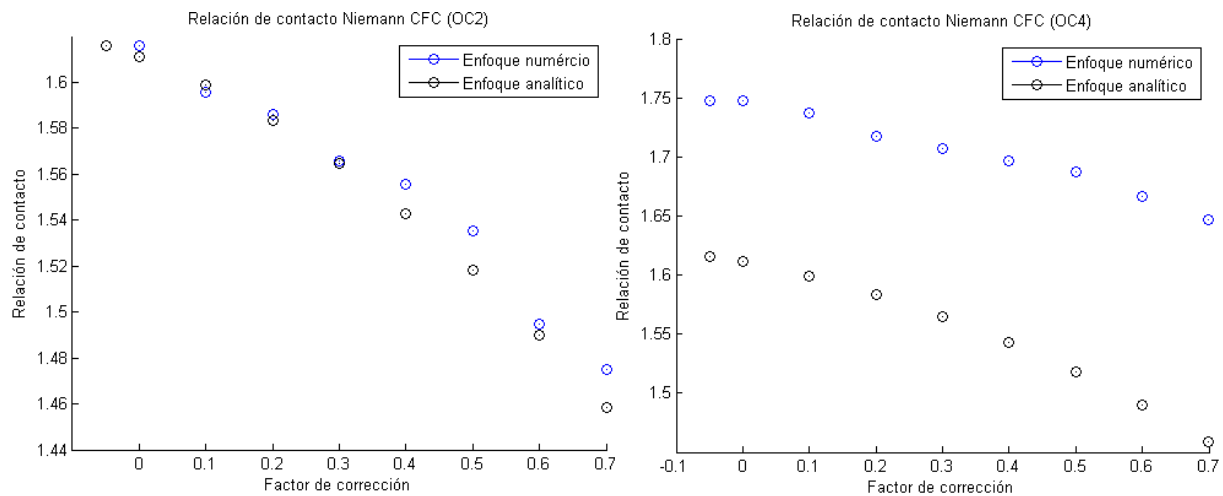


Figura 3 Variación de la relación de contacto teórica y efectiva para OC2 y OC4 (menor y mayor par resistente)

El mismo procedimiento de cálculo de la eficiencia realizado para el coeficiente de fricción constante (CFC), se ha realizado también para el resto de coeficientes de fricción expuestos en la sección 3, obteniendo los resultados presentados en la Figura 4. De especial interés es para este estudio analizar la dependencia del coeficiente de fricción sobre la eficiencia. Por esta razón se ha realizado la variación de los parámetros del coeficiente de fricción (ejemplos en la Figura 1) con el fin último de conseguir una formulación que se adecue al comportamiento real/experimental.

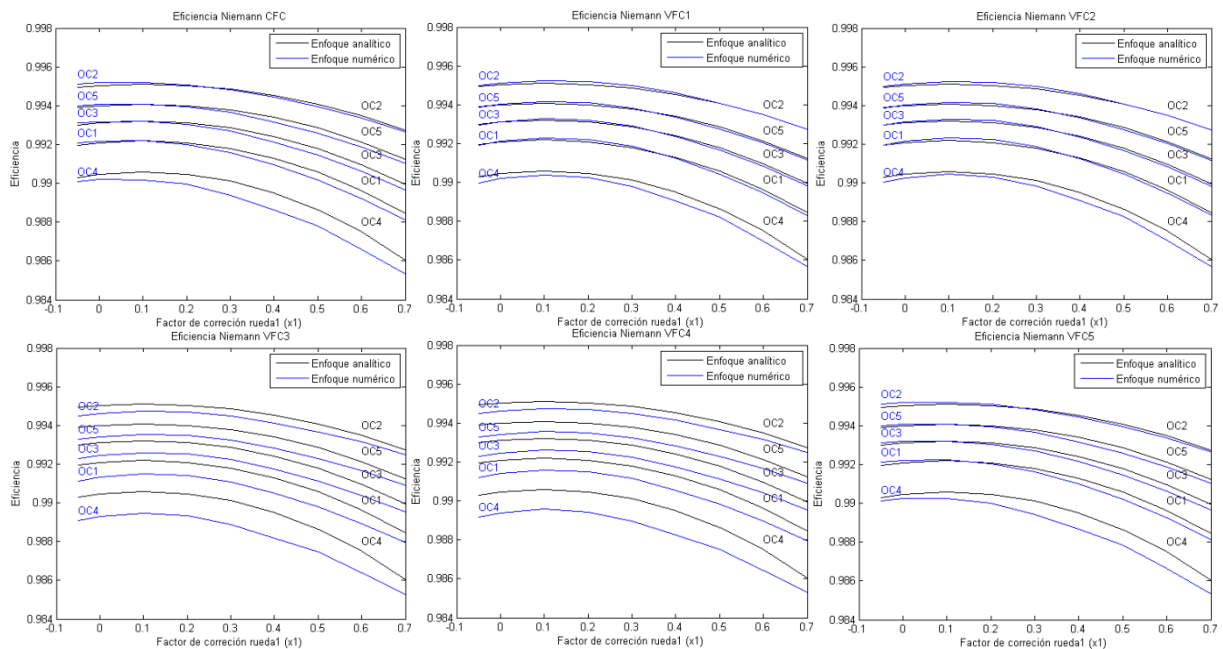


Figura 4 Comparación de la eficiencia para ambos enfoques a) CFC, b) VFC1, c) VFC2, d) VFC3, e) VFC4, f) VFC5

Comparando los resultados de eficiencia obtenidos para los seis tipos de coeficientes de fricción a través del enfoque numérico y los valores del enfoque analítico, se aprecia que la diferencia entre ellos es siempre menor que 0.3%. Además, dentro de los valores obtenidos a través del enfoque numérico, si comparamos entre ellos para diferentes coeficientes de fricción, se puede apreciar que la diferencia es menor que 0.2%.

Se puede observar que la mínima variación en el coeficiente de fricción tiene impacto en el valor de la eficiencia, correspondiéndose la mayor dispersión entre los valores de rendimiento de ambos enfoques a los coeficientes de rozamiento VFC3 y VFC4, en los que se ha variado como parámetro característico la velocidad de deslizamiento.

También se puede observar que la inclusión de la corrección en la zona del punto primitivo en las formulaciones de FC no tiene apenas influencia en lo que a la eficiencia se refiere (se aprecia al comparar VFC1-VFC2 o VFC3-VFC4). Este hecho sucede porque la velocidad de deslizamiento en la zona del punto primitivo es nula o cercana a este valor, por lo que el valor del coeficiente de rozamiento en esa región no va a tener un gran impacto en la pérdida total de potencia. Sin embargo, trabajos recientes [10, 11] consideran que la formulación más adecuada de coeficiente de fricción es la variable y de reparto de carga es la no uniforme (enfoque numérico), porque proponen una descripción más fiable del contacto. Por lo que es aceptable pensar, por un lado que los resultados obtenidos con las formulaciones de coeficiente de rozamiento VFC2 y VFC4 serán más ajustados a la realidad que los de las formulaciones VFC1 y VFC3, y por otro lado, que los resultados obtenidos a partir del enfoque numérico serán más ajustados a la realidad.

Analizando los resultados de eficiencia obtenidos, se observa una magnitud menor de rendimiento con las condiciones de operación de mayor par resistente, por lo que se puede concluir que el efecto del par es más influyente que el efecto de la velocidad en este aspecto. Además, se aprecia que la dispersión en los valores de eficiencia entre ambos enfoques se incrementa cuanto mayor es el par resistente al que se ve sometida la transmisión. Complementariamente, se puede apreciar que para un mismo valor de par resistente, una velocidad menor implica una disminución en la eficiencia.

En ambos casos, el hecho de que la eficiencia sea menor, viene precedido por la existencia de una mayor fuerza de fricción. La fricción será mayor cuanto mayor sea el par, puesto que existirá una mayor fuerza de contacto y un mayor coeficiente de fricción, y además, será mayor cuanto menor sea la velocidad porque existirá un coeficiente de fricción mayor.

En cuanto a la inclusión de correcciones de perfil, se puede observar que a partir de un cierto valor de corrección límite la eficiencia empieza a disminuir ($x=0.3$ aprox.). Este hecho se debe a que a partir de este valor, la zona del contacto simple se aleja de la región del punto primitivo cuanto mayor es la corrección (Figura 5). Este hecho se traduce, en que la fuerza de transmisión máxima entre engranajes, que antes se encontraba en una zona donde tanto la velocidad de deslizamiento como el coeficiente de rozamiento eran cercanos a ser nulos, se produzca en una zona donde ya no se da este comportamiento, traduciéndose en unas pérdidas mucho mayores en el contacto simple.

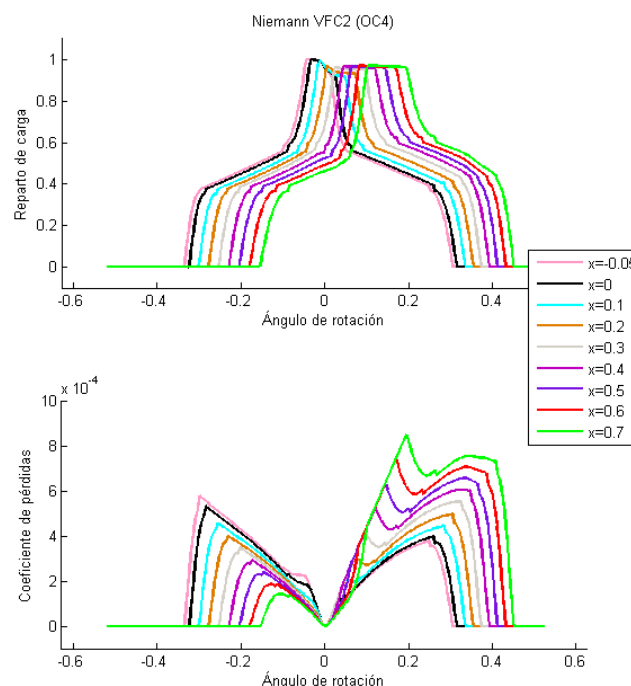


Figura 5 Comparación de reparto de carga y coeficiente de pérdidas instantáneas para varios factores de corrección

5. Conclusiones

En este estudio se ha realizado un análisis de la eficiencia para engranajes rectos corregidos (ampliamente utilizados en transmisiones reales) a partir del modelo de contacto y la metodología de cálculo de la misma desarrollados en trabajos previos de los autores [3-6]. Para la realización del trabajo se han tomado como referencia las condiciones de operación expuestas en [2] y ya usadas en trabajos previos, con el fin de comparar los resultados obtenidos. Especial atención se ha prestado a los aspectos disipativos en este tipo de sistemas, concretamente en este estudio sólo se ha tenido en cuenta el efecto de la fricción en el cálculo de las pérdidas energéticas. La fricción, implementada a partir de un modelo de Coulomb, se ha modelizado mediante el uso de las variantes de la formulación de Niemann para el coeficiente de rozamiento, con el fin de determinar la influencia en la eficiencia energética del sistema.

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que los valores de eficiencia obtenidos a partir de los coeficientes de fricción expuestos son de magnitud similar a la formulación original, pero con un comportamiento que se ajusta más al real (menos VFC3). Esto se traduce en que las variaciones dentro de la formulación de Niemann tienen un efecto poco notorio en el cálculo de la eficiencia. Sin embargo, cabe señalar que generalmente una variación en el coeficiente de fricción tiene efecto en el valor de la eficiencia, por lo que la elección de la formulación de coeficiente de rozamiento es un aspecto crucial a la hora de ajustar el modelo a la transmisión real, quedando pendiente la inclusión de otras formulaciones contrastadas en posteriores estudios.

Además, se puede concluir que el efecto del par es decisivo tanto para los valores de eficiencia en sí mismos (cuanto más par, menor eficiencia), como la diferencia de eficiencia entre ambos enfoques (cuanto más par, más diferencia). Siendo este efecto más influyente en los valores de eficiencia que el efecto de la velocidad, puesto que las simulaciones con condiciones de operación con mayor par resistente son las que menos eficiencia tienen. Además, comparando ambos enfoques, se puede observar que los resultados son similares cuando el par resistente es menor de 300 Nm, habiendo una dispersión entre ambos enfoques cuando se supera este valor.

A partir del análisis de las correcciones de perfil, se puede concluir que a partir de un cierto valor de corrección, en nuestro caso de estudio 0.3 por la geometría de las ruedas, la eficiencia de la transmisión disminuye tanto en cuanto este factor aumente.

6. Referencias

- [1] Anderson NE, Loewenthal SH. Effect of geometry and operating conditions on spur gear system power loss. *J Mech Des Trans ASME*. 1981;103(4):151-9.
- [2] Baglioni S, Cianetti F, Landi L. Influence of the addendum modification on spur gear efficiency. *Mechanism and Machine Theory*. 2012;49:216-33.
- [3] Diez-Ibarbia A, Fernández del Rincón A, Iglesias M, Viadero F. Efficiency analysis of shifted spur gears. *Proceedings of the second conference MeTrApp*; Bilbao. ; 2013.
- [4] Fernandez del Rincon A, Viadero F, Iglesias M, de-Juan A, García P, Sancibrian R. Effect of cracks and pitting defects on gear meshing. *Proc IMechE Part C: J Mech Engineering Science* 226. 2012(11):2805-15.
- [5] Fernandez Del Rincon A, Viadero F, Iglesias M, García P, De-Juan A, Sancibrian R. A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions. *Mechanism and Machine Theory*. 2013;61:30-58.
- [6] Fernández A, Iglesias M, de-Juan A, García P, Sancibrián R, Viadero F. Gear transmission dynamic: Effects of tooth profile deviations and support flexibility. *Appl Acoust*. 2014 3;77(0):138-49.
- [7] Höhn B-. Improvements on noise reduction and efficiency of gears. *Meccanica*. 2010;45(3):425-37.
- [8] Michaelis K, Höhn B-, Hinterstoßer M. Influence factors on gearbox power loss. *Ind Lubr Tribol*. 2011;63(1):46-55.
- [9] Ohlendorf H. Verlustleistung und erwärmung von stirnrädern.[dissertation]. TU München; 1958.
- [10] Sánchez MB. Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento [dissertation]. ; UNED, 2013.
- [11] Xu H. Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs [dissertation]. The Ohio State University; 2005.
- [12] Yada T. Review of gear efficiency equation and force treatment. *JSME Int* 1997;40(1):1-8.